

## PERCOLAÇÃO: PROBLEMAS FÁCEIS DE ENUNCIAR E DIFÍCEIS DE RESOLVER!

Bernardo N. B. de Lima, Maria Eulália Vares

**S**e procurarmos nos principais dicionários da língua portuguesa, o termo percolação é sinônimo de lixiviação, que é o movimento de fluido em meio poroso, com o fluido extraindo substâncias solúveis do meio por onde “percola”. Por exemplo, certamente já escutamos que as águas subterrâneas percolam no solo e entre as fraturas e fendas das rochas. Outro exemplo muito importante para nós matemáticos é o café: ao prepará-lo, a água percola através de um meio poroso, o pó de café, extraindo substâncias deste meio, o que é facilmente observado devido às mudanças de cor, odor e sabor do fluido.

Motivados por um problema aplicado – desenvolver um modelo probabilístico de máscaras de gás para trabalhadores de minas de carvão –, S. R. Broadbent e J. M. Hammersley, em 1957 [2], introduziram o modelo de percolação como o conhecemos em matemática. O meio poroso será um grafo  $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$  formado por um conjunto  $\mathbb{V}$  de vértices e um conjunto  $\mathbb{E}$  de elos, que são as ligações conectando pares de vértices. Uma imagem que podemos ter em mente é a de uma rede de canos (elos) como a que distribui água em nossas cidades. De um ponto de vista mais formal, o grafo mais utilizado é a rede hipercúbica  $d$ -dimensional,  $\mathbb{L}^d$ , cujos vértices são os pontos do espaço euclidiano  $d$ -dimensional com coordenadas inteiras e os elos unem dois vértices que diferem em apenas uma coordenada por uma unidade.

O caráter aleatório do modelo se manifesta atribuindo-se a cada elo o estado *aberto* ou *fechado* para a passagem do fluido. Em termos precisos, além do grafo temos um parâmetro,  $p$ , um número real no intervalo  $[0, 1]$  que denota a probabilidade de cada elo estar aberto. O modelo de percolação de Bernoulli com parâmetro  $p$  é aquele em que cada elo está aberto com probabilidade  $p$ , fechado com probabilidade  $1 - p$ , e os estados aberto e fechado para cada elo são variáveis aleatórias independentes. Em “matematiquês” o modelo é descrito pelo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_p)$ , onde  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}}$ , o espaço amostral, é o conjunto com todas as configurações possíveis para os estados aberto (ou 1) e fechado (ou 0) dos elos;  $\mathcal{A}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos de  $\Omega$  e  $\mathbb{P}_p$  é a medida de probabilidade subjacente – o subíndice  $p$  é para enfatizar que o estado de cada elo é 1 ou aberto com probabilidade  $p$ .

Dados dois vértices  $x, y \in \mathbb{V}$ , dizemos que eles estão conectados em uma configuração  $\omega \in \Omega$  se existe um caminho de elos abertos em  $\omega$  conectando os vértices  $x$  e  $y$ . Utilizaremos a notação  $(x \leftrightarrow y)$  para denotar o conjunto de tais configurações. Recorrendo à me-

táfora do fluido em meio poroso, em que o fluido penetra todos os elos abertos que encontra pela frente, dizer que  $x$  e  $y$  estão conectados quer dizer que se injetarmos fluido sob pressão no vértice  $x$  o vértice  $y$  ficará molhado. Dado um vértice  $x \in \mathbb{V}$  e uma configuração de elos abertos e fechados  $\omega \in \Omega$ , definimos o aglomerado de  $x$  na configuração  $\omega$ ,  $C_x(\omega)$ , como o conjunto dos vértices conectados a  $x$  por um caminho de elos abertos na configuração  $\omega$ , isto é, os vértices que ficarão molhados ao introduzirmos o fluido em  $x$ ; dito de modo mais preciso,  $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{V}; x \leftrightarrow y \text{ in } \omega\}$ . Em grafos transitivos, como a rede hipercúbica  $d$ -dimensional  $\mathbb{L}^d$ ,  $C_x$  é um conjunto aleatório cuja distribuição é a mesma para todo vértice  $x$ ; desse modo, sem perda de generalidade podemos nos fixar em um vértice como a origem e denotaremos simplesmente por  $C$  o aglomerado da origem. Podemos pensar em  $\omega$  como um subgrafo aleatório de  $\mathbb{L}^d$ , neste caso  $C_x(\omega)$  seria a componente conexa de  $\omega$  que contém o vértice  $x$ . A Figura 1 ilustra o modelo de percolação na rede quadrada.

A primeira pergunta que fazemos é sobre o tamanho do aglomerado  $C$ . Observe que seu número de vértices é um número natural, mas pode também ser infinito; logo, é natural surgir a pergunta: qual a probabilidade do aglomerado da origem ser infinito? Ou seja, para a variável aleatória  $C : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , quanto vale  $\mathbb{P}_p\{\omega \in \Omega; \#C(\omega) = \infty\}$ ? Utilizaremos a notação mais curta  $(0 \leftrightarrow \infty)$  para denotar o evento  $\{\omega \in \Omega; \#C(\omega) = \infty\}$ . Deste modo é natural definir a função  $\theta(p)$ , a probabilidade de percolação, como:

$$\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1], p \mapsto \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty).$$

Como definida acima, a função  $\theta(p)$  indica a probabilidade do aglomerado da origem ter tamanho infinito quando cada elo está aberto com probabilidade  $p$ . Podemos observar imediatamente que  $\theta(0) = 0$  e  $\theta(1) = 1$ ; além disso, é intuitivo acreditar que a função  $\theta(p)$  seja monótona não decrescente em  $p$ . Esta última afirmação é verdadeira e sua demonstração pode ser vista no Capítulo 1 de [8], que é um texto clássico de percolação e referência básica para todos aqueles que queiram se iniciar ou aprofundar seus conhecimentos sobre o assunto.

Dada a monotonicidade da função  $\theta(p)$ , é natural definirmos o ponto crítico do modelo,  $p_c$ , como aquele valor de  $p$  em que a função  $\theta$  deixa de ser zero, isto é,  $p_c = \sup\{p \in [0, 1]; \theta(p) = 0\}$ . Observe que o ponto crítico é uma característica do grafo; portanto, se considerarmos nosso grafo como a rede hipercúbica  $d$ -dimensional, temos que o ponto crítico é função da dimensão  $d$ . Deixamos como exercício para o leitor verificar que para  $d = 1$  temos que  $p_c = 1$ . O resultado abaixo, provado por Broadbent e Hammersley em [2], pode ser considerado um marco na teoria matemática da percolação:

**Teorema 1** *Considere um modelo de percolação de Bernoulli na rede hipercúbica  $d$ -dimensional com  $d \geq 2$ . Então existe  $p_c = p_c(d) \in (0, 1)$  tal que:*

$$\theta(p) \begin{cases} = 0, & \text{se } p \in [0, p_c), \\ > 0, & \text{se } p \in (p_c, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

O teorema acima nos diz que há duas regiões bem distintas do intervalo  $[0, 1]$ . O intervalo  $[0, p_c)$  é a fase subcrítica onde a probabilidade da origem percolar é zero e o intervalo  $(p_c, 1]$ , a fase supercrítica, onde a probabilidade da origem percolar é estritamente positiva. O teorema nada diz sobre o que ocorre no ponto crítico.

Quando  $d = 2$  foi provado por H. Kesten [11] que  $p_c = 1/2$ . De fato a prova deu-se em duas partes e passaram-se vinte anos entre ambas: em [10] T. Harris provou que  $\theta(1/2) = 0$  (em particular  $p_c \geq 1/2$ ). Em dimensões altas,  $d \geq 19$ , T. Hara e G. Slade [9] provaram, utilizando a técnica conhecida com expansão em laços, que a probabilidade de percolação no ponto crítico também é zero. Acredita-se que o mesmo seja válido para todo  $d \geq 2$ . Determinar se  $\theta(p_c(d)) = 0$  para  $3 \leq d \leq 18$  é um problema ainda em aberto e certamente um dos problemas mais importantes da probabilidade atual.

Na discussão acima, os estados de elos distintos (aberto ou fechado) representam variáveis aleatórias independentes. A consideração de uma classe importante de medidas mais gerais liga percolação a modelos oriundos da mecânica estatística. O exemplo mais básico corresponde ao clássico modelo de Ising na rede quadrada (estende-se a outros grafos e aos chamados modelos de Potts). Daqui até o final desta seção, este será sempre o nosso grafo,  $\mathbb{L}^2$ . No modelo de Ising atribui-se a cada vértice  $x$  uma variável aleatória  $\sigma_x$  que pode tomar dois valores,  $+1$  ou  $-1$ , simulando duas possíveis orientações de um spin. Tomando-se uma caixa finita  $\Lambda = [-L, L] \times [-L, L]$  em  $\mathbb{L}^2$  considera-se uma função energia que favorece o alinhamento de spins: um elo entre vizinhos com mesmo spin contribui com  $-1$  para a energia; caso contrário, contribui com  $+1$ . A energia  $H_\Lambda(\sigma)$  fica então  $2n(\sigma) - N_\Lambda$ , onde  $n(\sigma)$  é o número de elos que conectam vértices com spins distintos e  $N_\Lambda$  é uma constante, simplesmente o número total de elos no grafo restrito a  $\Lambda$  (irrelevante na definição abaixo). Define-se uma medida de probabilidade no conjunto de todas as configurações de spins na caixa  $\Lambda$

$$\mu_\Lambda(\sigma) = \frac{1}{Z(\beta, \Lambda)} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)}, \quad (2)$$

onde  $\beta > 0$  representa o inverso da temperatura e  $Z(\beta, \Lambda)$  é a constante de normalização para que os pesos somem 1. Note que valores grandes de  $\beta$  (baixas temperaturas) favorecem as configurações de menor energia, ao passo que para valores altos da temperatura ( $\beta$  pequeno), a entropia tem um papel mais importante, fazendo com que a medida tenda a ficar mais próxima de uma medida uniforme no conjunto de todas as configurações. Esse jogo entre energia e entropia determina a existência de uma temperatura crítica, que pode ser caracterizada da seguinte forma no caso do modelo de Ising:

coloca-se uma condição externa constante e.g. toma-se  $\sigma_x = +1$  para todo  $x$  na fronteira da caixa  $\Lambda$  e seja  $\mu_\Lambda^+$  a medida assim obtida. Existe um valor crítico  $\beta_c$  tal que o valor médio de  $\sigma_0$  na origem tende a zero quando  $L$  tende a infinito se  $\beta < \beta_c$ , e tende a um valor positivo  $m^+(\beta)$  se  $\beta > \beta_c$ . Em outras palavras, existe uma memória de longo alcance (o spin na origem lembra o que há na fronteira cada vez mais distante) abaixo da temperatura crítica. Uma versão disto se aplica também quando  $\sigma_x$  toma valores em  $\{1, 2, \dots, q\}$ ,  $q \geq 2$  inteiro, o que é conhecido como modelo de Potts.

A transição de fase no modelo de Ising também pode ser formulada ignorando condições externas, mas acrescentando um termo do tipo  $h \sum \sigma_x$  à energia, onde  $h$  representa um campo magnético e a soma é sobre  $x \in \Lambda$ . Da mesma forma, quando a temperatura  $1/\beta$  estiver abaixo de  $1/\beta_c$  observa-se uma “magnetização espontânea”, ou seja, o valor médio do spin na origem no limite  $L \rightarrow \infty$  é uma função  $m(\beta, h)$  que tende a  $m^+(\beta)$  ( $-m^+(\beta)$ ) quando  $h$  tende a zero por valores positivos (negativos, respectivamente). A existência de  $\beta_c$  (finito e positivo) foi inicialmente obtida por R. Peierls [15], sendo que L. Onsager [14] determinou o valor exato para o modelo de Ising. Onsager provou ademais que na temperatura crítica o valor médio, sob  $\mu_\Lambda^+$ , do spin na origem tende a zero quando o volume cresce, i.e.  $L \rightarrow \infty$ . Isto sem dúvida nos remete ao resultado de Harris-Kesten, e seria natural buscar pela relação entre os dois. Para isso precisamos olhar os modelos de forma mais geral.

C. M. Fortuin e P. W. Kasteleyn [6] introduziram, no final dos anos 1960, uma classe de medidas de percolação que generalizam as medidas  $\mathbb{P}_p$  consideradas anteriormente. Dependem de dois parâmetros:  $p$  como antes e  $q \in (0, +\infty)$ . Para  $p, q$  fixados, e restrita a um volume finito  $\Lambda$  a probabilidade de uma configuração de elos  $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}(\Lambda)}$  é dada por

$$\frac{1}{Z} p^{a(\omega)} (1-p)^{f(\omega)} q^{c(\omega)} \quad (3)$$

onde  $a(\omega)$  ( $f(\omega)$ ) representa o número de elos abertos (fechados),  $c(\omega)$  representa o número de aglomerados (ou componentes conexas) de  $\omega$ , e  $Z = Z(\Lambda, p, q)$  é novamente a constante de normalização. O parâmetro  $q$  introduz uma dependência de longo alcance. Consideraremos apenas o caso  $q \geq 1$ . Quando  $q = 1$  temos simplesmente  $\mathbb{P}_p$ .

Se  $q = 2$  e  $p = 1 - e^{-\beta}$  podemos associar uma configuração de spins atribuindo o mesmo spin  $\sigma_x$  para todos os vértices  $x$  em cada dado aglomerado de  $\omega$ , com probabilidade  $1/2$  e independente ao variarmos os aglomerados. Com isto recupera-se o modelo de Ising nos spins [5]. Para considerar condições externas constantes nos spins, podemos pensar que todos os elos com pelo menos um vértice fora de  $\Lambda$  estejam abertos e nesta componente infinita os spins sejam todos iguais à condição externa ( $+1$  ou  $-1$ ). Em  $\mathbb{L}^2$ , estendendo a notação acima, tem-se ainda  $\theta(p_c(2), 2) = 0$ , o que corresponde

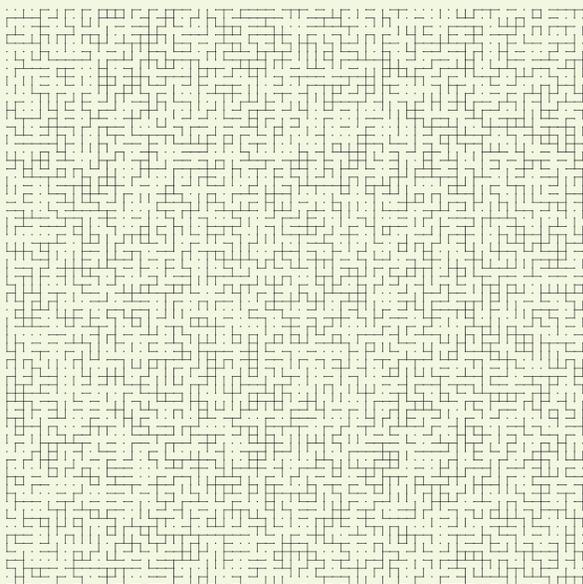


Figura 1. Simulação. Percolação Bernoulli ( $p=0.55$ ). (Cortesia Lucas Vargas)

à unicidade da medida na temperatura crítica, como provada por Onsager; o valor  $p_c(q) = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$  determina a temperatura crítica para o modelo de Potts em  $\mathbb{L}^2$ . A relação entre a percolação de Fortuin-Kasteleyn e o correspondente modelo de spins (Ising/Potts) tem sido muito explorada em pesquisa recente, especialmente no caso planar, com resultados importantes, confirmando outra conjectura famosa, devida a R.J. Baxter:  $\theta(p_c(q); q) = 0$  vale para  $q \leq 4$  ([3] e referências) ao passo que para  $q > 4$  a transição de fase é descontínua, i.e.  $\theta(p_c(q), q) > 0$  [4]. Conjectura-se resultado análogo para dimensões maiores, com uma função  $Q(d)$  no lugar de  $q = 4$  acima.

**PERCOLAÇÃO EM OUTRAS QUESTÕES** Diremos que um par  $(\eta, \xi)$  de sequências binárias  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$  e  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  é compatível se for possível extrair uns de  $\eta$  e zeros de  $\xi$  de modo que sobrem duas sequências infinitas idênticas. Fácil dar exemplos de pares compatíveis bem como de pares incompatíveis:  $\eta = 1$  fica evidentemente compatível com qualquer sequência  $\xi$  que tiver infinitos uns. Motivado por questões oriundas de agendamento em computação, P. Winkler [16] formulou o seguinte problema: supondo que  $\eta_n$  e  $\xi_m$  sejam todas variáveis aleatórias independentes, sendo que  $\eta_n$  ( $\xi_n$ ) vale 1 com probabilidade  $q$  ( $p$ ) e vale 0 com probabilidade  $1 - q$  ( $1 - p$ , respectivamente), podemos encontrar  $0 < q, p < 1$  de modo que o par seja compatível com probabilidade positiva? Trata-se pois da medida de probabilidade  $\mathbb{P}_q \times \mathbb{P}_p$  em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e pergunta-se se o conjunto dos pares compatíveis  $(\eta, \xi)$  tem probabilidade positiva. Espera-se uma resposta afirmativa se  $q$  próximo a 1 e  $p$  próximo a zero. Isto foi provado em [7] e [1].

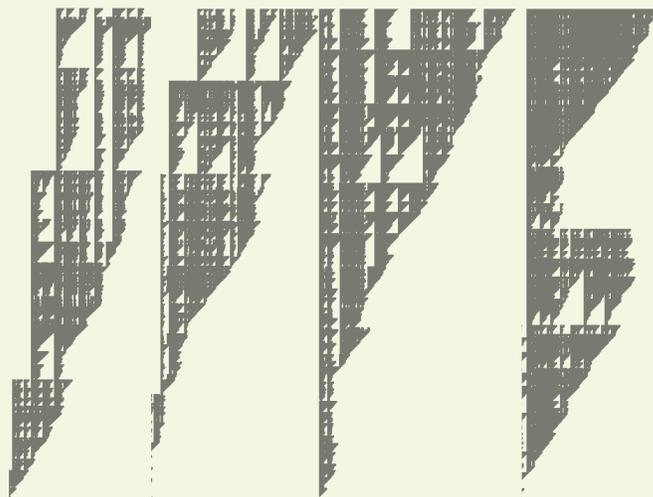


Figura 2. Simulação. Percolação em compatibilidade. (Cortesia Lionel Levine)

Cabe perguntar se podemos construir uma sequência  $\eta$  com densidade positiva de zeros, e que seja compatível com um conjunto de probabilidade positiva para  $\mathbb{P}_p$  (o que chamamos  $p$ -compatível). Uma resposta abstrata decorre do resultado acima (pelo teorema de Fubini), mas ainda cabe perguntar se podemos construir uma tal sequência explicitamente. Uma resposta parcial foi dada em [13], onde se constrói uma sequência com muitos zeros em um sentido mais fraco (dimensão de Hausdorff) que é  $p$ -compatível. Interessa salientar aqui que o problema pode ser visto como uma questão de percolação, ou seja, a existência de um caminho infinito aberto, a partir de um dado vértice. Há duas diferenças fundamentais em relação ao que tratamos antes: (i) mais natural pensar que agora são os vértices (em vez dos elos) que podem estar abertos ou fechados, e ademais os caminhos devem agora ser orientados em algum sentido, pois precisamos percorrer as sequências na ordem dada; (ii) as variáveis em uma mesma coluna são extremamente dependentes, em contraste com o exemplo discutido inicialmente. De fato a construção é feita em  $\mathbb{V} = \{0, 1, 2, \dots\}^2$ , após convenientemente utilizar uma transformação,  $\tilde{\eta}, \tilde{\xi}$ , das sequências binárias  $\eta, \xi$  que supomos terem infinitos zeros e infinitos uns. As coordenadas de  $\tilde{\eta}$  e  $\tilde{\xi}$  são os sucessivos comprimentos das filas de uns entre dois zeros sucessivos em  $\eta, \xi$ . Um vértice  $(u, v)$  será declarado aberto se  $\tilde{\eta}_u \geq \tilde{\xi}_v$ , de onde vemos a dependência em cada coluna. A Figura 2 ilustra com simulações correspondentes a  $(\eta, \xi)$  Bernoulli.

Há várias questões envolvendo sequências aleatórias que podem ser colocadas dessa forma. Não vamos entrar nos detalhes do exemplo. O que pudemos fazer com este método foi: para cada  $\epsilon > 0$  construímos uma sequência  $\eta_\epsilon$  cujo conjunto de zeros é um fractal de dimensão de Hausdorff pelo menos  $1 - \epsilon$  e para o qual podemos tomar  $p_\epsilon > 0$  de modo que  $\eta_\epsilon$  será  $p$ -compatível, para todo  $p > p_\epsilon$ .

Bernardo N. B. de Lima é professor associado do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). E-mail: bnblima@mat.ufmg.br  
 Maria Eulália Vares é professora titular do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). E-mail: eulalia@im.ufjf.br

## REFERÊNCIAS

1. Basu, R.; Sly, A. "Lipschitz embeddings of random sequences". *Probab. Theory Relat. Fields* 159, 721-775, 2014.
2. Broadbent, S. R. and Hammersley, J. M. "Percolation process I. Crystals and mazes". *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 53, 629-641, 1957.
3. Duminil-Copin, H. "Parafermionic observables and their applications to planar statistical physics models", *Ensaio Matemáticos* 25, Brazilian Mathematical Society, 2013.
4. Duminil-Copin, H.; Gagnebin, M.; Harel, M.; Manolescu, I.; Tassion, V. "Discontinuity of the phase transition for the planar random-cluster and Potts models with  $q > 4$ ". arXiv:1611.09877.
5. Edwards, R. G. and Sokal A. D. "Generalization of the Fortuin-Kasteleyn-Swendsen-Wang representation and Monte Carlo algorithm". *Phys. Rev D*. 38, 2009-2012, 1988.
6. Fortuin, C. M. and Kasteleyn, P.W. "On the random cluster model I. Introduction and relation to other models". *Physica* 57, 536-564, 1972.
7. Gács, P. "Compatible sequences and a slow Winkler percolation". *Combin. Probab. Comput.* 6, 815-856, 2004.
8. Grimmett, G. R. *Percolation*, 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
9. Hara, T. and Slade, G. "Mean field critical behavior for percolation in high dimensions". *Communications in Mathematical Physics* 128, 333-391, 1990.
10. Harris, T.E. "A lower bound for the critical probability in a certain percolation process". *Proc. Cam. Philos. Soc.* 56, 13-20, 1960.
11. Kesten, H. "The critical probability of bond percolation on the square lattice equals  $1/2$ ". *Communications in Mathematical Physics* 74, 41-59, 1980.
12. Kesten, H. *Percolation theory for mathematicians*. Birkhäuser, Boston, 1982.
13. Kesten, H.; de Lima, B. N. B.; Sidoravicius, V.; Vares, M. E. "On the compatibility of binary sequences". *Communications on Pure and Applied Mathematics (Print)*, 67, 871-905, 2014.
14. Onsager, L. "Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition". *Phys. Rev.* 65, 117-149, 1944.
15. Peierls, P. "On Ising's model of ferromagnetism". *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 32, 477-481, 1936.
16. Winkler, P. "Dependent percolation and colliding random walks". *Random Structures & Algorithms* 16, 58-84, 2000.

## FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: PARA UMA ABORDAGEM PROBLEMATIZADA

Victor Giraldo [1]

### INTRODUÇÃO: A RUPTURA ENTRE UNIVERSIDADE E ESCOLA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Há mais um século, o matemático alemão Felix Klein denunciava, em sua célebre obra *Matemática elementar de um ponto de vista superior* [2] (editada pela primeira vez em 1908), uma alienação entre a formação universitária de professores de matemática e a prática de sala de aula da escola básica. O autor identifica essa ruptura como uma dupla descontinuidade: por um lado, quando os estudantes ingressam nos cursos universitários de formação de professores, poucas relações são estabelecidas entre a matemática com que passam a ter contato e aquela anteriormente aprendida por eles como alunos da escola básica; e por outro lado, quando concluem esses cursos e iniciam a vida profissional, poucas relações são estabelecidas entre a matemática aprendida durante a graduação e aquela que passa a ser demandada pela prática de sala de aula da escola básica. Assim, é como se, ao ingressar na universidade, o futuro professor devesse "esquecer" toda a matemática que aprendeu até então na escola básica; e ao terminar a graduação, o professor devesse novamente "esquecer" toda a matemática ali aprendida para se iniciar na carreira docente. Em consequência, o curso universitário pode ter um efeito essencialmente inócuo na formação do professor.

A ruptura denunciada por Klein não é particular de seu tempo ou de seu contexto social, e tem paralelos com resultados de pesquisas mais recentes em educação matemática. Por exemplo, a pesquisadora estadunidense Deborah Ball, em sua tese de doutorado [3], identifica e desafia três suposições que, segundo a autora, permeavam tacitamente as concepções dos cursos universitários de formação de professores de matemática nos EUA à época: (i) os tópicos da matemática escolar são simples e comumente entendidos; (ii) portanto, esses tópicos não precisam ser reaprendidos pelos futuros professores na universidade; (iii) o conhecimento de matemática de nível universitário será suficiente para equipar os futuros professores com um entendimento amplo e profundo da matemática escolar, suficiente para o ensino da disciplina na educação básica.

Nesse estudo, Ball propôs problemas típicos da matemática escolar a um grupo de estudantes universitários que estavam se preparando para se tornar professores da educação básica. Por exemplo, foi pedido aos estudantes que formulassem *um contexto para o ensino de uma divisão por  $\frac{1}{2}$*  (isto é, para abordar a divisão por frações). Apenas 5 dentre 28 participantes do estudo forneceram respostas consideradas apropriadas. Os demais estudantes apresentaram respostas incorretas (em geral, confundindo divisão por  $\frac{1}{2}$  com divisão