



Freepik. Reprodução

Uma introdução à matemática e à física das escalas musicais

Por Marcos Pimenta e Rafael L. Pimenta

Resumo

Neste texto, explicitaremos as relações matemáticas – razões simples entre frequências sonoras – que estruturam as escalas musicais, mostrando que diferentes sistemas escalares e de afinação decorrem de distintas combinações dessas razões. Inicialmente, demonstramos o vínculo entre intervalos simples – como a oitava ($2/1$), a quinta justa ($3/2$) e a quarta justa ($4/3$) – e a série harmônica de uma corda em vibração. Em seguida, mostramos como a escola pitagórica construiu escalas por meio da aplicação sucessiva de quintas, gerando intervalos baseados apenas nas razões de $3/2$ e $4/3$, e como a escala justa, associada a Ptolomeu, incorporou também a razão $5/4$ para a terça maior, produzindo maior consonância em uma tonalidade específica, mas restringindo sua transposição. Demonstramos que o problema da modulação entre tonalidades levou ao desenvolvimento do temperamento igual ou da escala temperada, no qual a oitava é dividida em doze razões intervalares exatamente iguais (), permitindo a execução de uma dada melodia em qualquer tom, sendo a escala temperada uma conciliação entre simplicidade matemática e flexibilidade musical. Por fim, argumentamos que, embora as noções de consonância e dissonância estejam relacionadas à matemática das razões intervalares, sua valorização varia historicamente, evidenciando que a organização da escala musical resulta da interação entre princípios físicos e escolhas culturais.

Palavras-chave: Escalas musicais; Razões intervalares; Temperamento igual; Série harmônica

Introdução

Uma escala musical é uma sequência de notas com relações intervalares específicas. O parâmetro sonoro que varia de uma nota a outra é a frequência – o que se diferencia quando distinguimos um som agudo de um som grave. Especulativamente, podemos conceber diversos conjuntos arbitrários de notas e nada nos impede de utilizarmos escalas de quatro ou nove sons em uma composição musical. Nas culturas musicais ao redor do mundo, entretanto, é mais comum encontrarmos escalas de cinco e sete sons. Há tradições com grande repertório de melodias em escalas pentatônicas – como a japonesa, a balinesa, a etíope ou do povo Aka da África-Central, a título de exemplo – e é inegável a predominância, mundo afora, das escalas heptatônicas (embora também não sejam raras escalas hexatônicas, encontradas entre ameríndios, por exemplo).

Escalas de cinco e sete sons são bastante antigas. Em 2009, na Alemanha, arqueólogos encontraram restos de uma flauta de osso de abutre datada de 35 mil anos atrás – o instrumento mais antigo de que se tem registro. Na reconstituição do artefato, os pesquisadores identificaram a existência de cinco furos, tendo sido ele projetado, portanto, para a produção de uma pentatônica.^[1] Ademais, escavações realizadas entre as décadas de 1950 e 1970, na antiga cidade de Ugarite (atual Ras Shamra, na Síria), revelaram um corpo de canções Hurritas (povo mesopotâmico) datado de cerca

“Uma escala musical é uma sequência de notas com relações intervalares específicas.”

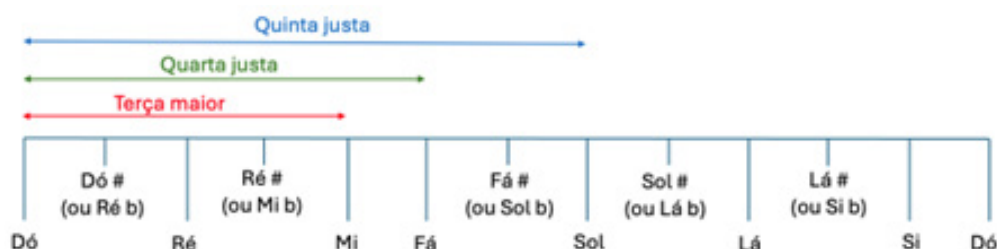
de 1400 anos A.C., em escalas heptatônicas.^[2]

Pentatônicas ou heptatônicas, essas escalas podem ter estruturas intervalares diferentes. Enfoquemos aquela que, no Brasil e nos dias de hoje, nos é mais familiar. Na Figura 1 está representada a escala musical que encontramos na maioria dos instrumentos musicais modernos, que é composta por doze notas musicais: as sete notas Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si, que correspondem às teclas brancas do piano, e as cinco notas intermediárias – sustenidos (#) e bemóis (b) – e que correspondem às teclas pretas do piano.

Acima do Si, há um outro Dó de frequência mais alta, e o intervalo musical entre as duas notas de mesmo nome era chamado, na teoria musical da Grécia antiga, diapasão.^[3] Na teoria da música ocidental, dizemos que este outro Dó

está a uma **oitava** acima do Dó original, por conta da prevalência da organização dos padrões melódicos em sete notas – mesmo em contextos em que, por transposição (reprodução do mesmo padrão intervalar a partir de notas diferentes), as doze notas são utilizadas. Embora a estrutura heptatônica seja ubíqua no mundo, há culturas que dividem o intervalo diapasão em mais de 12 partes – como é o caso da árabe (que o divide em 17 partes), da música indiana (que o divide em 22 partes) ou da música turca (em até 53 partes).^[4] Na música clássica indiana, embora a base de suas *ragas* (termo que designa algo entre melodia e escala) seja de sete notas – e o nome que dão às notas nos permite constatar isso (Sa, Re, Ga, Ma, Pa, Dha e Ni) – há ainda 15 *srutis* ou graus de variação (ornamentação) que são decodificados na teoria e na prática musical.

No sistema ocidental, a escala de 12 notas – a escala cromática, que abarca as notas brancas e pretas do piano – é dividida em 12 semitons, sendo um semitom (S) o intervalo entre, por exemplo, um Dó e um Dó#, como mostrado na



Fonte: Produção do autor

Figura 1. Escala composta por doze notas musicais: as sete notas Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si, e as cinco notas intermediárias, sustenidos (#) e bemóis (b). Na parte do alto estão representados os intervalos de terça maior, quarta justa e quinta justa

Figura 1. Dois semitons correspondem a um tom (T), como no caso do intervalo entre um Dó e um Ré – e com esses dois intervalos (tons e semitons) podemos soletrar a estrutura da **escala maior** (a escala das notas brancas do piano), de sete sons, a partir de Dó: T – T – S – T – T – T – S. O intervalo entre um Dó e um Mi (terceira nota da escala) é chamado de terça maior, o intervalo entre um Dó e um Fá (quarta nota dessa escala) é chamado de quarta justa e o intervalo entre um Dó e um Sol (quinta nota) é chamado de quinta justa. Estes três intervalos estão mostrados na parte do alto da Figura 1.

Da Renascença aos dias de hoje – e em escala global, já que a cultura europeia se difundiu pelos cinco continentes – é muito provável que a escala maior tenha sido aquela mais empregada no repertório musical. Com base na escala maior, foi elaborada a maior parte das melodias familiares a um brasileiro, por exemplo – das canções infantis (e.g. Ciranda cirandinha; Boi da cara preta), passando pelo repertório da música clássica europeia (e.g. Ode à alegria,

de Beethoven; Prelúdio em C Maior de Bach), chegando no choro e no samba (e.g. O mundo é um moinho, de Cartola; 1 x 0, de Pixinguinha).

Neste texto, vamos discutir as relações entre os intervalos da escala musical com os números. Para tanto, é preciso introduzir aqui o conceito de **temperamento**, que, de maneira simplificada, é a maneira de se “afinar” as notas – e, portanto, as escalas – de um instrumento. Em que pese esse seja um tema que, contemporaneamente, preocupe um número reduzido de músicos, teóricos da música e físicos – dado que um mesmo padrão de afinação é hoje adotado globalmente pelos músicos e pela indústria dos instrumentos musicais –, o fato de uma mesma escala poder ser afinada de maneiras distintas ensejou, historicamente, muitos debates e modelos de temperamento alternativos. A título de exemplo, O Cravo Bem Temperado (1720), de Johann Sebastian Bach, obra de enorme importância para a música ocidental, composta por 24 prelúdios e 24 fugas – uma para cada tonalidade (12 em escala maior e 12 em escala menor, de Dó a Si) – carrega em seu título a proposta de um temperamento adequado à transposição da mesma escala a diferentes tonalidades. O temperamento bachiano, a maneira como o compositor afinava seus cravos e clavicórdios, embora eficiente para que as qualidades intervalares da escala maior fossem razoavelmente mantidas em todos os 12 tons, apresentava diferenças em relação ao

temperamento que se tornará hegemônico a partir dos séculos XVIII e XIX.

A seguir, mostraremos que frações de números inteiros pequenos levam ao chamado temperamento justo, que é próximo daquele que usamos hoje em dia – o temperamento igual – mas que tem uma tonalidade predominante. Apresentaremos algumas questões que matemáticos da Grécia antiga confrontaram na afinação de uma escala, oferecendo ao leitor o vislumbre dos variados modelos possíveis de temperamento que foram propostos da antiguidade à modernidade. Finalmente, mostraremos como é construída a escala temperada, aquela verificada nos instrumentos nos dias de hoje, com a qual uma música pode ser tocada, preservando-se as mesmas relações intervalares, em qualquer tonalidade.

Os Harmônicos de um violão

Um violão é um instrumento que nos permite realizar experiências bastante simples visando entender a relação entre os sons da escala musical e os números. Ele é constituído de 6 cordas tensionadas entre duas extremidades. A tensão na corda pode ser variada girando-se a tarraxa na extremidade do braço do violão, alterando-se, assim, a nota musical. As cordas têm diferentes diâmetros e são formadas por diferentes materiais – como nylon e aço – e, assim, submetidas a tensões diferentes e com diâmetros distintos, cada uma soa uma nota musical

“Os intervalos musicais e suas respectivas razões numéricas são facilmente percebidos quando tocamos e ouvimos os harmônicos na corda de um violão em vibração.”

diferente. A parte da frente do braço do violão é dividida por barrinhas de aço encrustadas na madeira, que são chamadas de trastes. A superfície de madeira onde estão acoplados os trastes é chamada espelho.

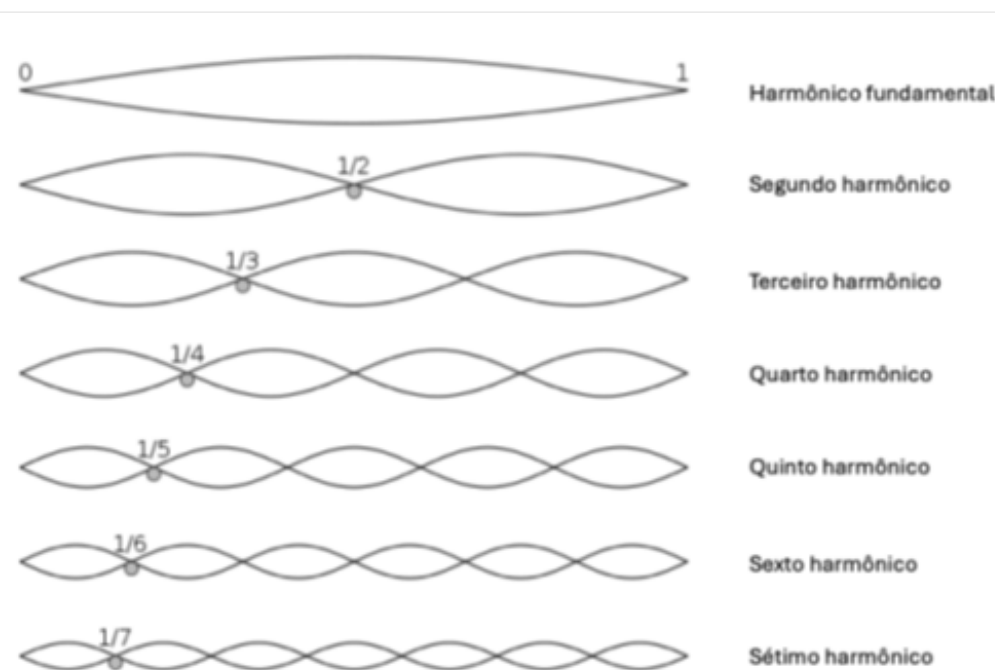
Os intervalos musicais e suas respectivas razões numéricas são facilmente percebidos quando tocamos e ouvimos os harmônicos na corda de um violão em vibração. Os harmônicos de vibração de uma corda tensionada são as maneiras com que ela pode vibrar quando tocada (as primeiras sete maneiras são mostradas na Figura 2). O primeiro modo de vibração, aquele do harmônico (ou modo) fundamental, está no alto da figura; ele apresenta um máximo – chamado de ventre – bem no meio da corda e só apresenta pontos parados (chamados de nós) nas duas

extremidades. O segundo harmônico, logo abaixo do fundamental, apresenta um ponto parado (nó) bem no meio da corda. O terceiro harmônico apresenta dois nós em $1/3$ e $2/3$ do comprimento da corda, o quarto harmônico apresenta três nós em $1/4$, $2/4$, $3/4$ do seu comprimento, e assim por diante para os harmônicos de ordem mais alta. Quando a corda do violão é tocada, embora o harmônico fundamental seja preponderante, todos os harmônicos de ordem mais alta estão também presentes na vibração.

Tendo em vista as posições de seus nós, o segundo harmônico pode ser ouvido quando, ao se colocar a corda em vibração, pousamos levemente o dedo na corda sobre seu 12º traste, sem que ela encoste no traste, deixando-a

solta para vibrar inteira. O 12º traste corresponde à metade (1/2) do comprimento da corda (à metade da distância entre o rastilho e o cavalete). O leve apoio do dedo no meio da corda irá abafar o modo fundamental, que tem um ventre de vibração neste ponto, e irá fazer com que soe de maneira mais ressaltada o segundo harmônico, que tem um nó no meio da corda. De forma geral, o harmônico de ordem n é ouvido quando a corda é levemente abafada em $1/n$ do seu comprimento, já que ele terá um nó nesta posição. O terceiro harmônico de vibração é ouvido ao se apoiar o dedo levemente sobre a corda na posição do 7º traste, que corresponde a $1/3$ do comprimento da corda em vibração. O quarto, quinto e sexto harmônicos são ouvidos apoiando-se o dedo levemente sobre a corda na posição do 5º traste ($1/4$ da corda), do 4º traste ($1/5$ da corda), e do 3º traste ($1/6$ da corda), respectivamente. Esses harmônicos são mais facilmente ouvidos quando tocamos na corda mais grave do violão. Experimente tocar os harmônicos em um violão atentando-se a como eles soam diferentes notas musicais. Tente achar as posições em que a corda deve ser apoiada para que sejam ouvidos o sétimo, oitavo e nono harmônicos.

Como mostrado na Figura 2, o comprimento de onda do harmônico de ordem n (n -ésimo harmônico) é n vezes **menor** do que comprimento de onda do harmônico fundamental. A física mostra que o comprimento de onda e a frequência de vibração dos harmônicos da corda do



Fonte: Produção do autor

Figura 2. Maneiras possíveis com que uma corda pode vibrar. O harmônico fundamental está representado no alto da figura. Abaixo dele, vêm o segundo, terceiro, quarto, quinto e sétimo harmônicos, com pontos parados (nós) em $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$ e $1/7$ do comprimento, respectivamente.

violão são **inversamente proporcionais**, sendo a constante de proporcionalidade dada pela velocidade de propagação da onda na corda. Quanto menor for o comprimento de onda, maior será a frequência. Podemos então concluir que a frequência de vibração do n -ésimo harmônico é n vezes **maior** do que a frequência do harmônico fundamental. A frequência do segundo harmônico é o dobro da frequência do harmônico fundamental, a frequência do terceiro harmônico será o triplo da frequência do harmônico fundamental, e assim por diante. Esta relação de números inteiros entre as frequências dos diferentes modos de vibração justifica a escolha da designação de harmônicos para as vibrações da corda, por demonstrar uma harmonia na natureza.

Vamos agora comparar o intervalo dos sons entre o harmônico fundamental e o segundo harmônico. Constatamos que o segundo harmônico corresponde à mesma nota do harmônico fundamental, porém numa oitava acima. Se a fundamental for um Dó-1, o segundo harmônico será um Dó-2 da próxima escala. O intervalo musical entre estas duas notas é o que os gregos chamavam de diapasão, ou o que chamamos de uma **oitava** na tradição ocidental. A relação de frequências entre o segundo harmônico e o fundamental é de **2/1**. A mesma relação vale para o intervalo entre as frequências do quarto harmônico e do segundo harmônico ($4/2 = 2/1$). Podemos ouvir o quarto harmônico apoiando o dedo sobre o 5º traste, que corresponde a $1/4$

do comprimento da corda. A frequência da nota do quarto harmônico será 4 vezes maior do que a frequência do modo fundamental, e soará como um Dó-3, duas oitavas acima do Dó-1. A frequência do oitavo harmônico soará como um Dó-4, três oitavas acima do Dó-1.

O terceiro harmônico é obtido abafando levemente a corda na posição do 7º traste do violão, que corresponde a $1/3$ do seu comprimento. A frequência de vibração do terceiro harmônico da corda será 3 vezes a frequência do harmônico fundamental e, portanto, $3/2$ vezes a frequência do segundo harmônico. A vibração da corda no terceiro harmônico soará como uma outra nota musical. Tocando o segundo harmônico e o terceiro harmônico, ouviremos um intervalo de uma **quinta justa**. Se o segundo harmônico for um Dó-2, o terceiro harmônico será um Sol-2. A razão entre as frequências do terceiro e do segundo harmônicos é igual a **3/2**, e esta é a fração que associamos a qualquer intervalo de quinta justa. Partindo de uma nota com determinada frequência, obtém-se a frequência da nota que esteja uma quinta justa acima **multiplicando** a frequência da primeira por $3/2$.

Continuando a busca sobre as relações entre frações de números inteiros e intervalos musicais, pode-se obter a nota que está a uma quinta justa abaixo de uma nota inicial **dividindo** a frequência da primeira por $3/2$ (ou seja, multiplicando a frequência por $2/3$). Como mostrado na Figura 1, uma quinta justa corresponde ao intervalo de 7 semitons. Assim, uma quinta justa abaixo do

“Esta relação de números inteiros entre as frequências dos diferentes modos de vibração justifica a escolha da designação de harmônicos para as vibrações da corda, por demonstrar uma harmonia na natureza.”

Dó-2 será o Fá-1, que, por sua vez, é uma quarta justa acima do Dó-1. A frequência da nota que está a uma quinta abaixo do Dó-2 é obtida multiplicando 2 por $2/3$, ou seja, $4/3$. Concluimos assim que a fração **4/3**, que é a razão entre as frequências do Fá-1 e do Dó-1, está associada ao intervalo de uma **quarta justa**. O intervalo de quarta justa pode ser escutado tocando-se as notas do terceiro e do quarto harmônicos, apoiando-se o dedo no 7º traste ($1/3$ do comprimento) e no 5º traste ($1/4$ do comprimento), respectivamente.

Escalas pitagóricas

Pitágoras de Samos viveu no século quinto A.C. e, além de formular o famoso teorema sobre os lados de um triângulo retângulo, se dedicou ao estudo de vibrações em objetos que emitiam sons, como cordas tensionadas, tubos e garrafas de vidro contendo diferentes quantidades de água. O trabalho sobre os sons e vibrações de Pitágoras é um

exemplo pioneiro de ciência experimental feita na antiguidade.^[5] Ele criou uma escola na cidade de Croton, no sul da Itália e, junto com seus discípulos, tratou matematicamente a escala musical, baseando-se no estudo de uma corda dividida em duas, três e quatro partes. Eles nomearam o intervalo correspondente à fração $3/2$ como *diapente* (intervalo que na teoria musical contemporânea é a quinta justa) e a fração $4/3$ como *diateresson* (intervalo de quarta justa), desenvolvendo escalas cujas notas são obtidas a partir das relações de quartas e quintas justas. Matematicamente, o procedimento pitagórico para gerar uma escala musical consiste em multiplicar valores de frequência por $3/2$ e por $4/3$. Para que os resultados fiquem na mesma oitava, os valores devem estar entre 1 e 2. Assim, se o valor obtido na multiplicação for maior que 2, a regra é dividi-lo por 2, o que corresponde a jogar a nota para a oitava de baixo. Diferentes conjuntos de frações e tipos de escalas musicais são obtidos se considerarmos regras de aplicações de quintas e quartas justas. A regra pode ser apenas aplicações sucessivas de quintas justas (multiplicar por $3/2$), ou pode ser apenas aplicações sucessivas de quartas justas (multiplicar por $4/3$), ou ainda regras que incluam tanto quartas justas como quintas justas. Cada uma destas escolhas levará a uma escala distinta, correspondente a um dos modos gregos, como veremos adiante.

Como um exemplo, vamos construir a escala musical considerando a regra de partir

dos intervalos de quarta justa e quinta justa e gerar notas com intervalos sucessivos de quintas justas acima. Matematicamente isto equivale a partir das frações $3/2$ e $4/3$, e multiplicá-las sucessivamente por $3/2$, eventualmente dividindo por 2 se a fração obtida for maior do que 2. Por exemplo, a quinta justa de uma quinta justa corresponde a multiplicação $3/2 \times 3/2$, que é igual a $9/4$. Mas como a fração $9/4$ é maior do que 2, precisamos dividi-la por 2, obtendo, assim, a fração **$9/8$** que está na oitava de baixo. Essa fração está associada ao intervalo de 1 **tom**, também chamado de **segunda maior**. Se a corda estiver afinada em Dó, a nota Ré terá a frequência $9/8$ vezes maior do que a frequência do Dó. Continuando o procedimento, vamos considerar uma quinta justa acima de uma segunda maior, ou seja, a multiplicação $3/2 \times 9/8 = 27/16$. Esta fração corresponde a um intervalo de **sexta maior**, e a nota soará como um Lá. Aplicando agora um intervalo de quinta justa sobre a fração $27/16$, chegamos agora a $27/16 \times 3/2 = 81/32$. Como esta é uma fração maior do que 2, precisamos dividi-la por 2 para chegarmos a uma nota dentro da primeira oitava, obtendo então a fração **$81/64$** . Esta fração é associada ao intervalo de **terça maior** e a nota soará como

um Mi. Finalmente, aplicando o intervalo de uma quinta justa sobre a fração $81/64$, chegamos a $3/2 \times 81/64 = 243/128$, que corresponde a um intervalo de **sétima maior**, sendo a fração **$243/128$** associada a nota Si. O conjunto de frações que chegamos acima considerando a regra de aplicação de quintas justas acima dá origem à escala musical mostrada na Figura 3.

Dividindo a fração de uma nota pela fração da nota anterior, verificamos que elas estão separadas apenas por dois diferentes intervalos de frequências, que estão representados pelas frações em vermelho na figura 3. Repare que existe uma fração para o tom, que é igual a $9/8$, e a fração que corresponde a um semitom é $256/243$. Repare que o intervalo de dois semitons, ou seja, a **multiplicação** $(256/243) \times (256/243) = 1,110$, é diferente do intervalo de um tom, ou seja, $9/8 = 1,125$. Esta escala é apropriada para tocar músicas em determinadas tonalidades, mas não permite a transposição, ou seja, a tocar a mesma música, mas num outro tom.

É uma característica da inteligência musical humana distinguir frequências sonoras e um músico treinado é capaz de reconhecer intervalos musicais por reflexo, sem realizar cálculos mentalmente. Com base nessa função cognitiva



Fonte: Produção do autor

Figura 3. Escala musical pitagórica, que foi obtida aplicando-se intervalos de quintas justas nas frações $3/2$ e $4/3$.

humana, a qualidade sonora de uma escala está calcada na sequência intervalar singular de tons (T) e semitons (S) que lhe é característica (como T-T-S-T-T-T-S da escala Jônica mostrada na figura 3, por exemplo). A partir daqui, é preciso ter-se em mente também que essa sequência depende da determinação de uma nota como inicial ou principal, a nota a qual considerar-se-á o 1º grau da escala (a tônica). Nessa operação de eleição de uma tônica, sequências de notas são “hierarquizadas”, pois a uma delas é atribuída uma centralidade referencial, enquanto as demais passam a ter qualidades relativas, vinculadas às suas distâncias da tônica. Observe-se, assim, que a partir de uma escala heptatônica, seis outras podem ser alcançadas por derivação, por meio da mudança da nota tônica. Este é o caso dos chamados modos eclesiásticos ou gregos – repertório escalar de base da música medieval e renascentista europeia – que podem ser obtidos a partir do deslocamento da tônica a partir da sequência intervalar do modo jônio, como pode-se observar abaixo:

Jônio – T-T-S-T-T-T-S
 Dórico – T-S-T-T-T-S-T
 Frígio – S-T-T-T-S-T-T
 Lídio – T-T-T-S-T-T-S
 Mixolídio – T-T-S-T-T-S-T
 Eólio – T-S-T-T-S-T-T
 Lócrio – S-T-T-S-T-T-T

É importante comentar que podemos obter outros conjuntos de frações, e, portanto, outras escalas pitagóricas, se considerarmos os intervalos de quartas justas acima, o que corresponde a multiplicar a frequência de um

tom sucessivamente por $4/3$ e eventualmente dividir por 2 se o número for maior do que 2. Aplicando este procedimento, obtemos duas novas frações, $16/9$ e $32/27$, e com elas chegamos a uma nova escala heptatônica representadas pelas frações 1, $9/8$, $32/27$, $4/3$, $3/2$, $27/16$, $16/9$ e 2. Dividindo cada um destes números pelo anterior chegamos às frações $9/8$, $256/243$, $9/8$, $9/8$, $9/8$, $256/243$, $9/8$ que correspondem aos mesmos valores de tons e semitons da Figura 3, mas com a sequência do modo Dórico. Ou seja, a escala pitagórica não é única, mas diferentes regras levam a diferentes conjuntos de frações cujas separações intervalares dão origem a diferentes modos gregos.

A escala justa (ou o temperamento justo)

Uma outra contribuição importante vinculada ao desenvolvimento de escalas musicais veio do astrônomo de Alexandria, Claudius Ptolomeu, que viveu no segundo século DC. Um dos livros mais importantes de Ptolomeu é chamado *Sobre Harmônicos* e contém, entre muitas outras coisas, novas ideias de como compreender as escalas musicais [Johnston 1989]. As razões da escala ptolomaica são bem próximas do temperamento que usamos atualmente. Em particular, ela se deve à associação de outras frações (além de $3/2$ e $4/3$) a intervalos musicais, considerando harmônicos de ordem mais alta.

Vamos considerar o quinto harmônico da corda de um

violão, que pode ser escutado tocando com um dedo levemente apoiado na corda sobre o 4º traste do violão, que corresponde a aproximadamente $1/5$ do seu comprimento, mas sem encostar a corda no traste. A razão entre as frequências do quinto harmônico (4º traste) e quarto harmônico (5º traste) é igual a $5/4$ e o intervalo musical entre as notas que soam estes harmônicos é de uma **terça maior**. Ou seja, se o quarto harmônico for um Dó-3, o quinto harmônico será um Mi-3. Repare que este valor $5/4 = 1,25$ é próximo, porém distinto, do valor do intervalo de terça maior da escala pitagórica discutida acima, $81/64 = 1,266$. Ptolomeu mostrou que a conexão entre a lógica aritmética e a estética musical não era única.

É interessante notar que as três notas fundamental, terça maior ($5/4$) e quinta justa ($3/2$) formam uma tríade maior, que é o chamado **acorde maior** comumente usado em diversas culturas e estilos musicais. Estas três notas correspondem de fato aos sons do quarto, quinto e sexto harmônicos mostrados na Figura 2. Continuando a investigação dos intervalos musicais e razões entre estes harmônicos, uma próxima fração que surge é $5/3$. O intervalo musical entre as notas do terceiro e do quinto harmônico pode ser escutado apoiando-se o dedo no 7º traste (terceiro harmônico) e no 4º traste (quinto harmônico), e corresponde a uma **sexta maior**. Ou seja, se multiplicarmos a frequência do Dó por $5/3$, obtemos a sexta nota da escala musical, ou seja, o Lá. Repare que o valor

da sexta maior da escala ptolomaica ($5/3 = 1,666$) é próximo, mas não exatamente igual, ao valor da sexta maior da escala pitagórica discutida anteriormente ($27/16 = 1,688$).

Se a corda estiver afinada em Dó-1, o oitavo harmônico será um Dó-4. Escutando os sons do oitavo e nono harmônicos podemos constatar que o nono harmônico será um Ré-4. Assim, a frequência da nota Ré será a frequência da nota Dó multiplicada por **9/8**, estando esta fração associada ao intervalo de **segunda maior**. Finalmente o intervalo de **sétima maior** (e da nota Si) é obtido multiplicando a frequência do Dó fundamental pelo intervalo de uma quinta ($3/2$) e depois pelo intervalo de uma terça ($5/4$), ou seja, $3/2 \times 5/4 = 15/8$.

Chegamos assim a uma escala com frações entre números inteiros pequenos, que é a chamada escala em entonação justa, representada na Figura 4. Dividindo a fração de uma nota pela fração da nota anterior, verificamos que essas notas estão separadas por três diferentes intervalos, representados pelas frações em vermelho na Figura 4. Repare que existe uma única fração para o semitom, que é igual a $16/15$, mas existem duas frações para um tom inteiro, o $9/8$ e o $10/9$. Como esta escala foi obtida a

partir dos harmônicos de uma nota Dó, ela pode soar bem ao se tocar uma música no tom de Dó maior. Ela é assim designada como escala em entonação justa em Dó. No entanto, se nos ativéssemos à mesma estrutura de relações e reproduzíssemos uma mesma melodia partindo de outro tom (outra nota), essa melodia apresentaria relações intervalares (razões) diferentes daquela elaborada na tonalidade de Dó e soaria “desafinada”.

Há dois aspectos cuja importância deve aqui ser salientada. O primeiro é que as escalas são construídas a partir de frações de números inteiros pequenos ($3/2$, $4/3$ e $5/4$), como vimos. O segundo é que, a depender de como essas razões são empregadas para a geração de outras notas, teremos escalas formadas por proporções numéricas distintas. Ressaltemos que essas diferenças podem se dar tanto nas sequências de tons e semitons que configuram uma dada escala – por exemplo, T-T-S-T-T-T-S, referente ao modo jônio, ou T-S-T-T-T-S-T, referido ao modo dório – quanto nas razões específicas dos tons e semitons – o que pode ser observado na escala justa, com um tom de $9/8$ e outro de $10/9$, ou na comparação entre ela e a escala pitagórica, uma com um semitom de $16/15$ e, a outra,

com um semitom de $256/243$. Essas divergências (sonoramente) mais sutis entre tons e semitons são as diferenças entre temperamento, modos de entonação: uma mesma escala pode, portanto, ser afinada de maneiras distintas.

A escala temperada

Apenas no século XVI surgiram as primeiras propostas de soluções para o problema da transposição de tonalidades, sobretudo com os trabalhos do chinês Zhu Zaiyu e do belga Simon Stevin, que deram origem ao desenvolvimento da escala temperada – ou o temperamento igual – que é a escala que usamos hoje. Sua ampla utilização no ocidente se consolidou definitivamente apenas em fins do século XVIII. Na escala temperada, todos os 12 semitons da escala musical correspondem a um mesmo intervalo, ou seja, a **razão** entre as frequências de um tom e seu semitom anterior é sempre um mesmo número, que vamos denominar por f . As razões de frequências das 12 notas em relação à nota fundamental são, portanto, dadas pelas potências de f , ou seja, $1, f, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7, f^8, f^9, f^{10}, f^{11}$ e f^{12} . A 12^{a} potência de f corresponde ao intervalo de uma oitava, onde a razão das frequências é igual a 2. Temos, portanto, que $f^{12} = 2$, de onde podemos concluir que:

$$f = \sqrt[12]{2} = 1,059463.$$

O número f se refere ao intervalo de um semitom. Isto significa que a frequência de um tom é f vezes maior do que



Fonte: Produção do autor

Figura 4. Escala musical justa que foi obtida a partir das relações e frequência de harmônicos de ordem mais alta

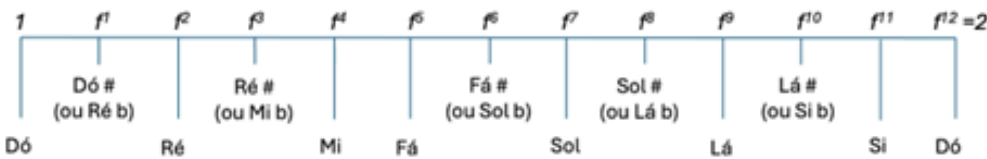
a frequência de seu semitom anterior. A frequência do Dó# é f vezes a frequência do Dó e a frequência do Ré é f^2 vezes a frequência do Dó#. Portanto, a frequência do Ré é f^2 vezes a frequência do Dó. O intervalo de um tom vale então $f^2 = 1,122462$. O diagrama da escala temperada está mostrado na Figura 5.

A Tabela 1 compara os números que correspondem às razões de frequência para todos os intervalos musicais, para a escala justa obtida através dos harmônicos de uma corda e para a escala temperada. Repare que o intervalo de quinta justa, que é

associado à fração $3/2 = 1,5$ na escala justa, corresponde a $f^7 = 1,498307$ na escala temperada. Estes números são diferentes, mas muito próximos, diferindo apenas de 0,11%. Apenas ouvidos bastante musicais conseguem perceber esta diferença. O intervalo de quarta justa, que vem da fração $4/3 = 1,333$ na escala justa, corresponde a $f^5 = 1,33484$ na escala temperada, números próximos diferindo também de apenas 0,11%. O intervalo de terça maior, que é de $5/4 = 1,25$ na escala justa vale $f^4 = 1,259921$ na escala temperada, uma diferença neste caso de 0,8%. Os demais intervalos

estão nomeados na tabela abaixo, onde são mostrados os valores das frações associadas a cada nota musical, assim como os valores das potências do número $f = 1,059463$, que correspondem às razões de frequências das notas dos instrumentos musicais que hoje temos a disposição, como, por exemplo, o violão e o piano

Há duas noções estreitamente vinculadas às relações numéricas entre os intervalos musicais: as de consonância e dissonância. De maneira geral, tratando das alturas (das notas), podemos dizer que relações intervalares matematicamente mais simples produzem sonoridades mais consonantes e que aquelas mais complexas geram sons mais dissonantes. A história da música ocidental e as diferentes tradições musicais não ocidentais, estudadas por etnomusicólogos, nos evidenciam, entretanto, que as relações entre os fenômenos naturais e os culturais não são



Fonte: Produção do autor

Figura 5. escala musical de temperamento igual, ou escala temperada.

Tabela 1. Intervalos musicais perfeitos, obtidos através da escala justa, e intervalos temperados

Nome do Intervalo	Escala justa	Escala $f = \sqrt[12]{2} = 1.059463$
Uníssonos (Dó)	$1/1 = 1$	$f^0 = 1$
Segunda menor (semitom) (Réb)	$16/15 = 1,06666...$	$f^1 = 1,059463$
Segunda maior (tom) (Ré)	$9/8 = 1,125$	$f^2 = 1,122462$
Terça menor (Mib)	$6/5 = 1,2$	$f^3 = 1,189207$
Terça maior (Mi)	$5/4 = 1,25$	$f^4 = 1,259921$
Quarta justa (Fá)	$4/3 = 1,33333...$	$f^5 = 1,33484$
Quinta diminuta (Solb)	$64/45 = 1,42222...$	$f^6 = 1,414214$
Quinta justa (Sol)	$3/2 = 1,5$	$f^7 = 1,498307$
Sexta menor (Láb)	$8/5 = 1,6$	$f^8 = 1,587401$
Sexta maior (Lá)	$5/3 = 1,66666...$	$f^9 = 1,681793$
Sétima menor (Sib)	$16/9 = 1,77777...$	$f^{10} = 1,781797$
Sétima maior (Si)	$15/8 = 1,875$	$f^{11} = 1,887749$
Oitava (Dó)	$2/1 = 2$	$f^{12} = 2$

Fonte: Produção do autor

tão diretas. A título de exemplo, embora a quinta e a quarta justas ($3/2$ e $4/3$, respectivamente) tenham sido dois intervalos privilegiados na alta Idade Média, sobretudo no gênero musical que ganhou o nome de Organum Paralelum, a partir da Renascença, em compêndios de ensino de contraponto, ver-se-á a indicação de que a quarta justa é uma dissonância e que a quinta justa não deve ser empregada consecutivamente pelas mesmas duas vozes, pois esse encadeamento era considerado “áspero”. No mesmo contexto renascentista, os intervalos de terça (maior e menor, $5/4$ e $6/5$, respectivamente) são

os considerados mais consonantes, a sonoridade “doce” – como textualmente disse o teórico da música italiano Gioseffo Zarlino (1517-1590) –, adequada ao gosto da época. É possível que isso se deva a uma ruptura com procedimentos da música europeia de séculos anteriores – como aquela do Ars Nova. Por outro lado, a dissonância pode se relacionar ao contraste. Quando ouvimos músicas que privilegiam determinadas relações (digamos, as terças, por exemplo), um intervalo diferente se destacará pela diferença. O sistema tonal, que se constitui a partir do século XVII, por exemplo, é baseado em um jogo contrastivo de

tensão e repouso opondo intervalos dissonantes (mormente a quinta diminuta) e consonantes (a terça).

Marcos Pimenta é professor emérito do Departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). É atualmente o coordenador do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia (INCT) de Nanomateriais de Carbono. É membro titular da Academia Brasileira de Ciências e da “The World Academy of Sciences” (TWAS). Entre 2017 e 2019 foi o presidente da Sociedade Brasileira de Física.

Rafael. L. Pimenta é doutorando no Programa de Pós-Graduação em Artes, Universidade do Estado de Minas Gerais e professor da Academia da Orquestra Filarmônica de Minas Gerais.

REFERÊNCIAS

[1] CONARD, Nicholas J.; MALINA, Maria; MÜNZEL, Susanne C. New flutes document the earliest musical tradition in southwestern Germany. *Nature*, Londres, 2009.

[2] WEST, M. L. The Babylonian musical notation and the Hurrian melodic texts. *Music & Letters*, Oxford, 1994.

[3] JOHNSTON, Ian. Measured tones: the interplay of physics and music. Bristol; Philadelphia: IOP Publishing, 1989.

[4] YARMAN, Ozan. 79-tone tuning & theory for Turkish makam music: solution to the non-conformance between current model and practice. 2008. Tese (Doutorado)

– Institute of Sonology, Istanbul Technical University, Istanbul, 2008.

[5] MAOR, Eli. Music by the numbers: from Pythagoras to Schoenberg. Princeton: Princeton University Press, 2018